1.Понятие множества. Основные операции.
Множество – основопологающее, первичное и неопределяемое понятие математики. Множеством принято называть набор, совокупность нек-х объектов. Объекты, из кот-х состоит то или иное множ-во, наз-ся элементами этого множ-ва. Множества обозначаются большими латинскими буквами, элементы этих множеств – маленькими, пустое множество – символом ?.
Если любой элемент x нек-го множ-ва A явл-ся элементом множ-ва B, то говорят, что множ-во A явл-ся подмножеством множества B: B ? A. Пустое множ-во – подмножество любого множ-ва. Само множество A и пустое множ-во ? называют несобственными подмножествами множ-ва A. Все остальные подмножества называются собственными.
Множество, относительно которого все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами, называется универсальным – U.
Основные операции - сложение (объединение), умножение (пересечение) и вычитание.
Объединением (или суммой) двух мн-в A и B называется мн-во, содержащее все такие и только такие элементы, кот-ые явл-ся элементами хотя бы одного из этих мн-в. Объединение мн-в A и B обозначают как A ? B.
Пересечением (или умножением) двух мн-в A и B называется мно-во, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат мн-ву A и мн-ву B одновременно. Пересечение мн-в A и B обозначают как A ? B.
Разностью мн-в A и B называется мн-во, состоящее из тех и только тех элементов мн-ва A и которые не принадлежат мн-ву B. Разность мн-в A и B обозначают как A \ B. Операция, при помощи которой находится разность мн-в, называется вычитанием.
Если B ? A, то разность A \ B называется дополнением мн-ва B до мн-ва A.
Если мн-во B является подмножеством универсального мн-ва U, то дополнение B до U обозначается , то есть = U \ B.
При отсутствии скобок операции выполняются по приоритету: 1)? 2) ? 3) ? и \
A ? ? = ?
A ? ? = A
A ? A = A
A ? A = A
A ??= ?
A ??= U
A = A
A\? = ?
A ? B = B ? A – коммутативность пересечения
A ? B = B ? A – коммутативность объединения
A ? (B ?C) = (A ? B) ? C – ассоциативность пересечения
A ? (B ?C) = (A ? B) ? C – ассоциативность объединения
A ? (B ?C) = (A ? B) ? (A ? C) – дистрибутивность объединения относительно пересечения;
A ? (B ?C) = (A ? B) ? (A ? C) – дистрибутивность пересечения относительно объединения
A ? (A ? B) = A
A ? (A ? B) = A
A\(B ? C) = (A\B) ? (A\C)
A\ (B ? C) = (A \ B) ? (A\ C)

2. Соответствия и функции. Мощность множества. Счетные множества.

Декартовым (прямым) произведением множеств называется множество упорядоченных пар вида

Степенью декартового произведения называется число множеств n, входящих в это декартово произведение.

Соответствием на мн-ах A и B наз-ся произвольное подмножество G ? A x B.

Проекцией G соответствия G на A наз-ся множество {a є A| сущ-ет (a,b) є G)}. Аналогично, проекция G = {bєB| сущ-ет (a,b) є G)}.

Соответствие G ? A x B наз-ся: 1)всюду определенным, если G=A,т.е. любому эл-ту A сопоставлен хоть один элемент из B;в противном случае оно наз-ся частично определенным; 2)сюръективным(или соответствием «на»), если G=B; 3)инъективным(или соответствием «в»), если при любом b є G сущ-ет! a є A|(a,b) є G,т.е. всякому эл-ту, который чему-то сопоставлен соответствует единств. элемент A такой что между A и B есть соответствие; 4)функциональным или (функцией), если при любом a є G сущ-ет! b є B|(a,b) є G; 5)взаимно однозначным(биекцией), если оно всюду определенно, сюръективно, инъективно и функционально.

Мн-ва бывают конечные и бесконечные(Мн-во, равномощное отрезку натурального ряда, а также пустое мн-во, наз-ся конечным. Мн-во, не являющееся конечным, наз-ся бесконечным).

Мощностью конечного мн-ва A называется число его элементов и обозначается через |A|.

Два мн-ва наз-ся равномощными, если сущ-ет взаимно однозначное соответствие между их элементами(биекция). Это понятие применимо к конечным и бесконечным мн-м.

Мн-во, равномощное мн-ву натуральных чисел, называется счетным. Другими словами, счетное мн-во - это такое мн-во, элементы которого можно "перенумеровать" при помощи натуральных чисел так, чтобы при этом все числа были использованы и различные элементы всегда имели бы различные номера. Т.О., счетное множество A всегда можно записать в виде A{a1,a2, ...,an, ...}

3. Континуум. Фактор-множество, его мощность. Теорема Кантора.

КОНТИНУУМ (от лат. continuum - непрерывное) множество, равномощное множеству вещественных чисел. Например, совокупность всех точек отрезка прямой или множество всех иррациональных чисел.

Пусть X - множество и R - отношение эквивалентности на нем. Из свойства транзитивности отношения эквивалентности следует, что любой класс эквивалентности является множеством всех элементов, эквивалентных произвольному элементу из этого класса. Таким образом, из теоремы следует, что отношение эквивалентности позволяет данное множество X представить в виде объединения взаимно непересекающихся классов эквивалентности.

Совокупность всех классов эквивалентности называется фактор-множеством. Оно обозначается символом X/R.

Пусть A1,A2,…,An – конечные мн-ва, |A1| = m1, |A2| = m2, …, |An| = . Тогда |A1xA2x…xAn|=m1m2….

В теории множеств теорема Кантора гласит, что Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств. Доказательство.Предположим, что существует множество A, равномощное множеству всех своих подмножеств 2A, то есть что есть биекция f, ставящая в соответствие каждому элементу множества A некоторое подмножество множества A. Рассмотрим множество f биективно, а , поэтому существует такой, что f(y) = B. Теперь посмотрим, может ли y принадлежать B. Если , то , а тогда, по определению B, . И наоборот, если , то , а следовательно, . В любом случае, получаем

противоречие. Следовательно, исходное предположение ложно и A не равномощно 2A.Заметим, что 2A содержит подмножество, равномощное A (например, множество всех одноэлементных подмножеств A), а тогда из только что доказанного следует | 2A | > | A |
Теорема Кантора:Множество всех действительных чисел на отрезке [0;1] не является счетным.
Доказательство
Допустим это множество счетно изобразим его числа десятичными дробями.

1-я 0, a11, a12 ….
2-я 0, a21, a22 ….
………………….
Возьмем произвольное число 0,b1,b2,b3
b1 ? a11, b2 ? a22, …
Эта дробь не может выйти в последовательность т.к. отличается от всех чисел, значит нельзя пронумеровать числа на отрезке [0;1]. Множество нечетно и называется континуальным, а его мощность континуум. Метод, используемый при доказательстве, называется диагональным методом Кантора.

4. Отношения и их типы. Отношения порядка. Диаграмма Хассе.
Отношение. Пусть дано R?Mn – n местное отношение на множество M. Будем изучать двухместные или бинарные отношения. Если a и b находятся в отношении R, то записывается a R b.
Проведем отношение на множество N: А) отношение ? выполняется для пар (7,9) (7,7_ Б) (9,7) не выполняется. Пример отношения на множество R А) отношение находится на одинаковом расстоянии от начала координат выполняется для пар (3; 4) и (2; ?21) Б) (3; 4) и (1; 6) не выполняется. Для задания бинарных отношений можно использовать любые способы задания множеств. Для конечных множеств используют матричный способ задания множеств. Матрица бинарного отношения на множество M={1;2;3;4}, тогда матрица отношения C равна
Отношение E заданные единичной матрицей
называется отношением равенства. Отношением назовется обратным к отношением R, если ajRai тогда и только тогда, когда ajRai обозначают R-1.
Типы отношений: 1. Рефлексивные, если при любом aєM aRa
2. Антирефлексивные, если при любом aєM aa
2. Если из aRb следует bRa, ==> отношение R симметричное. В матрице отношения элементы сумм Cij=Cji. Если из aRb и bRa следует a=b ==> отношение R – антисимметричное. Пр. Если a ? b и b ? a ==> a=b
3. Если дано ? a,b,c из aRb и aRc следует aRC ==> отношение называемое транзитивным.
Отношение называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
Пр. отношение равенства E
5. Отношение называется отношением нестрогого порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Отношение называется отношением строгого порядка, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Пр. а) отношение ? u ? для чисел отношение нестрогого б) отношение < u > для чисел отношение строгого
Диаграмма Хассе - графическое представление частично упорядоченного, в котором с каждой точкой из X сопоставляется точка плоскости таким образом, что меньшая точка всегда располагается ниже большей точки.

Диаграмма Хассе состоит из точек, которые представляют элементы множества а также из соединяющих их линий, которые представляют собой отношения между элементами класса или домена (в данном случае интерпретируется отношение частичного порядка). Данный пример иллюстрирует отношение IS IN («является подмножеством») между множествами {}, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3} и {1,2,3}.Заметим, что в случае графической интерпретации отношения частичного порядка с помощью диаграммы Хассе свойство антисимметричности рассматриваемого отношения было бы отображено в явном виде.

5. Графы. Основные понятия. Ориентированные графы.
Графом G = (V,E) наз-ся совокупность мн-ва V и заданного на нем бинарного отношения E. Если отношение E симметрично, граф наз-ся неориентированным. В противном случае – ориентированным. V это мн-во вершин или узлов(носитель графа), E это мн-во пар (в случае неориентированного графа — неупорядоченных) вершин, называемых рёбрами, а в случае ориентированных – дугами. Вершины и рёбра графа называются также элементами графа, число вершин в графе | V | — порядком, число рёбер | E | — размером графа.Вершины u и v называются концевыми вершинами (или просто концами) рёбра e = {u,v}. Ребро, в свою очередь, соединяет эти вершины. Две концевые вершины одного и того же ребра называются соседними.Два ребра называются смежными, если они имеют общую концевую вершину.Два ребра называются кратными, если множества их концевых вершин совпадают.Ребро называется петлёй, если его концы совпадают, то есть e = {v,v}.Степенью degV вершины V называют количество рёбер, для которых она является концевой (при этом петли считают дважды).Вершина называется изолированной, если она не является концом ни для одного ребра; висячей (или листом), если она является концом ровно одного ребра.
Ориентированный граф (сокращённо орграф) G — это упорядоченная пара G: = (V,A), для которой выполнены следующие условия: V это множество вершин или узлов, A это множество (упорядоченных) пар различных вершин, называемых дугами или ориентированными рёбрами. Дуга — это упорядоченная пара вершин (v, w), где вершину v называют началом, а w — концом дуги. Можно сказать, что дуга v w ведёт от вершины v к вершине w.
Способы задания графов.
1)Графический. Граф можно представить в виде мн-ва точек или кружков на плоскости, соответствующих вершинам, которые соединены линиями, соответствующие ребрам(или дугам).
2)Граф без изолированных вершин можно задать списком ребер.
3)С помощью матрицы инцидентности A = ||||,I = 1,2…,n, у кот-ой эл-т равен 1, если ребро инцидентно вершине, и равен 0 в противном случае. U,v,w,x – вершины графа; a,b,c,d-ребра(дуги).
4)С помощью матрицы смежности. Квадратная матрица S = ||||, I = 1,2…,n, у кот-ой эл-т   равен 1, если сущ-ет ребро(дуга), идущее из одной вершины в другую, и равен 0 в противном случае.
Для неориентированного графа матрица смежности всегда симметрична

u
v
w
x
a

1
0
0
0
b
1
1
1
0
c
0
1
0
1
d
0
0
1
1

a
b
c
d
a
0
1
1
0
b
1
0
1
0
c
1
1
0
1
d
0
0
1
0

6. Матрица связности и инцидентности графа. Матрица достижимости.
Графом G=(V,E) наз-ся совокупность множ-ва V и заданного на нем бинарного отношения E. Если отношение E симметрично, граф наз-ся неориентированным, в противном случае-ориентированным.

Сущ-ют различные способы задания графов.

1. Граф можно задать с помощью матрицы инцидентности. Пусть - вершины графа, а - его ребра (дуги). Матрицей инцидентности неориентированного графа наз-ся матрица у которой элемент равен 1, если ребро инцидентно вершине 0 в противном случае. Для ориентированного графа мы будем в клетке (I,j) матрицы ставить 1, если дуга в вершине -1- если заканчивается, и 1 – если и начинается и заканчивается. Матрица инцидентности для рассматриваемого графа:

1
-1
0
0
0
0
0

-1
1
0
0
0
0
0

0
1
-1
0
0
0
0

0
1
0
-1
0
0
0

0
-1
0
1
0

0
0

0
0
1
-1
0
0
0

0
0
0
1
-1
0
0

0
0
0
0
0
1
0

2. Граф можно задать с помощью матрицы смежности(связности). Матрица смежности графа наз-ся квадратная матрица S, у которой элемент равен 1, если существует ребро (дуга), идущее из вершины в , и равен 0 в противном случае. В рассматриваемом примере ориентированного графа матрица смежности имеет следующий вид:

0
1
0
0
0
0
0

1
0
1
1

0
0
0

0
0
0
1
0
0
0

0
1
0
0
1
0
0

0
0
0
0
0
0
0

0
0
0
0
0
1
0

0
0
0
0
0
0
0

Для неориентированного графа матрица смежности всегда симметрична
Матрица достижимости простого ориентированого графа G = (V,E) — бинарная матрица замыкания по транзитивности отношения E (оно задаётся матрицей смежности графа). Таким образом, в матрице достижимости хранится информация о существовании путей между вершинами орграфа. например:

7. Циклы в графах. Базис циклов. Цикломатическое число.

Пусть G=(V,E) – неориентированный граф. Циклом наз-ся цепь, концевые вершины которой совпадают. Цепь наз-ся составной , если в ней повторяется хотя бы одно ребро. Цепь наз-ся сложной , если в ней повторяется хотя бы одна вершина , в противном случае, т.е. когда в цепи различны все вершины цепь наз-ся простой. Базисом пространства циклов графа наз-ся такое множ-во простых циклов , что любой цикл R графа можно представить в виде суммы , а ни один из циклов нельзя представить в виде суммы других циклов . Цикломатическим числом графа наз-ся число его ребер минус число вершин плюс число связных компонент графа.

8. Эйлеровы и гамильтоновы графы.
Эйлеровым циклом (путем) графа называется цикл (путь), содержащий все ребра графа ровно один раз. Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется эйлеровым графом.

Теорема . Граф G обладает эйлеровым циклом с концами и тогда и только тогда, когда G – связный и , – единственные его вершины нечетной степени.

Теорема Граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда G – связный и все его вершины имеют четную степень.

Гамильтоновым циклом (путем) графа G называется цикл (путь), проходящий через каждую вершину G в точности по одному разу. Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется гамильтоновым. Критерий существования гамильтонова цикла в произвольном графе G еще не найден. Достаточным условием существования гамильтонова цикла является полнота графа G.

На рис. 14.5 граф G не является эйлеровым (вершина инцидентна только одному ребру) и не является гамильтоновым, но обладает эйлеровым путем с концевыми вершинами и . Граф изображенный на рис. 14.6 является эйлеровым (последовательность ребер образует эйлеров цикл).

9. Раскраска графа. Поиск пустых подграфов. Хроматическое число.
Пусть G=(V,E)-неориентированный граф. Пустым подграфом графа G наз-ся такое множ-во его вершин, в котором все вершины попарно несмежны, а при добавлении любой другой вершины образ-ся хотя бы одно ребро.
Окрестностью вершины графа G наз-ся подграф , носитель которого состоит из вершины и всех смежных ей вершин, а сигнатуру образуют все ребра графа G, соединяющие вершины . Неокрестностью вершины графа G наз-ся подграф , носитель которого есть , а сигнатура состоит из всех ребер графа G, соединяющих вершины .
Алгоритм нахождения всех пустых подграфов:
Сведем выделение пустых подграфов к построению дерева, в кот. Каждый путь между висячей вершиной и корнем графа определяет пустой подграф.
1.сопоставим корню синтезируемого дерева исходный граф G.
2. фиксируем в исходном графе вершину с мин-ой степенью. Строим из корня исходящие дуги в кол-ве штук, и конец каждой из них сопоставляем вершине,входящей в окрестность .
3. каждый конец построенных дуг взвешиваем неокрестностью вершины
4. считаем конец построенного яруса корнем нового дерева.
5. для каждой вершины устанавливаем, взвешена ли она символом . Если нет, то переходим к п.2. если все вершины взвешены , то переходим к п.6
6. для каждого пути из корня дерева к его вершине, взвешенной , множ-во вершин исходного графа, соответствующих концам дуг в этом пути, образуют пустой подграф

Раскраской вершин графа в k цветов наз-ся разбиение носителя V на непересекающиеся подмножества не содержит смежных вершин. Хроматическим числом h(G) графа наз-ся минимальное k, для которого сущ-ет раскраска графа в k цветов.
Алгоритм минимальной раскраски вершин графа
1.выделяем множ-во всех пустых подграфов графа G
2. строим двумерную таблицу, каждой строке которой сопоставляем пустой подграф, а столбцу-вершину: в клетке (I,j) записываем 1, если j-я вершина содержится в i-ом пустом подграфе, в противном случ. Записываем 0
3. находим все покрытия столбцов строками. Каждое покрытие порождает раскраску: вершины из каждого пустого подграфа раскрашиваем одним цветом. Покрытие минимальной мощности определяет хроматическое число графа.

10. Поток в сети. Теорема Менгера.
Сетью наз-ся ориетированный граф G=(V,E), в котором выделены два множества вершин и таких, что их каждой вершины дуги только исходят, в каждую вершину дуги только входят, а все другие вершины инцидентны как входящим, так и исходящим дугам. Вершины множеств и наз-ся полюсами. Разделяющим множеством сети наз-ся такое множ-во ее дуг,после удаления которых в графе не остается ни одного пути из в . Разрезом наз-ся разделяющее множ-во, которое не имеет собственного разделяющего подмножества. Потоком в сети наз-ся множ-во неотрицательных чисел , приписанных к дугам =1,2…,m, таких, что , и для любой вершины, за исключением полюсов, сумма для входящих дуг равна сумме для исходящих дуг. Величиной потока наз-ся сумма   для всех дуг, входящих в полюс .
Пропускной способностью сети наз-ся максимальная величина ее потока.
Пропускной способностью разреза наз-ся сумма весов его дуг.
Теорема Менгера: пропускная способность сети равна минимальной пропускной способности ее разраза.

11. Булевы функции. Разложение Шеннона.
Булевой (логической) функцией n переменных f(x1, x2, …, xn) называется такая функция, аргументы xi и значение которой принадлежат множеству {0,1} (т.е. все переменные и сама функция могут принимать только два значения: 0 (ложь) и 1 (истина)). Аргументы булевой функции также называются булевыми.
Из определения логической функции следует, что функция n переменных – это отображение, которое можно задать непосредственно таблицей, называемой таблицей истинности данной функции. Например, функция трех переменных f(x,y,z) может определяться следующей таблицей истинности.

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Это означает, что f(0,0,0) = 1, f(0,0,1) = 0, f(0,1,0) = 1 и т. д.
Кроме таблицы истинности, удобно использовать аналитическую форму.
Пример для функции с 2мя переменными:
x
y

f1
f2
f3
f4
f5
f6
f7
f8
f9
f10
f11
f12
f13
f14
f15
f16
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
1
1
1
1
1
1
1
1
0
1
0
0
0
0
1
1
1
1
0
0
0
0
1
1
1
1
1
0

0
0
1
1
0
0
1
1
0
0
1
1
0
0
1
1
1
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1

0
&
¬(x?y)
x
¬(y?x)
y

V

?
¬y
y?x
¬x
?
|
1

Булева функция называется вполне определенной, если она задана на всех возможных наборах значений логических переменных, в противном случае – частично определенной.

Любая булева функция f(x1, x2,…,xn) представима в виде разложения Шеннона

k
f(x1, x2,…, xk, xk+1,…, xn)= V xi?i f(?1 , ?2 ,…, ?k , xk+1 ,…, xn) ,
(?1, ?2,…, ?k) i=1

где дизъюнкция берется по всем наборам переменных ?i=0, 1; i=1,2,…,k.
Разложение Шеннона применяется последовательно к тем переменным, для кот. количество переключений функции максимально. Количество переключений определяется весом произвольной функции по данной переменной.
f1=?f/?x1=f(0,x2,…,xn) f(1,x2,…,xn)

12. СКНФ и СДНФ.
Существует два вида нормальных форм: конъюнктивная нормальная форма, т. е. конъюнкция нескольких дизъюнкций (КНФ) и дизъюнктивная нормальная форма, т. е. дизъюнкция нескольких конъюнкций (ДНФ).
Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) – такая конъюнкция дизъюнкций, в которой:
1) Различны все члены дизъюнкции ("слагаемые");
2) Различны все члены каждой конъюнкции ("множители");
3) В каждой конъюнкции нет одновременно переменной и ее отрицания;
4) Каждая конъюнкция содержит все переменные, входящие в данную формулу или их отрицания.
СКНФ: (X?Y?Z)(¬X?¬Y?Z)(X?¬Y?Z)
Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – такая дизъюнкция конъюнкций, в которой:
1) Различны все члены конъюнкции ("множители");
2) Различны все члены каждой дизъюнкции ("слагаемые");
3) В каждой дизъюнкции нет одновременно переменной и ее отрицания;
4) Каждая дизъюнкция содержит все переменные, входящие в данную формулу или их отрицания.
СДНФ: (¬XYZ)?(X¬YZ)?(¬XY¬Z)?(XY¬Z)
Построение СДНФ и СКНФ по таблице истинности:
СДНФ:
1) Выбрать из таблицы истинности те строки, в которых значение формулы - "Истина".
2) Для каждой выбранной строки составить конъюнкцию переменных или их отрицаний так, чтобы эта конъюнкция была истинной (для этого переменные, которые в соответствующей строке имеют значение "Ложь" нужно взять с отрицанием, а переменные, имеющие значение "Истина" - без отрицания).
3) Составить дизъюнкцию полученных конъюнкций.
СКНФ:
1) Выбрать из таблицы истинности те строки, в которых значение формулы - "Ложь".
2) Для каждой выбранной строки составить дизъюнкцию переменных или их отрицаний так, чтобы эта дизъюнкция была ложной (для этого переменные, которые в соответствующей строке имеют значение "Истина" нужно взять с отрицанием, а переменные, имеющие значение "Ложь" - без отрицания).
3) Составить конъюнкцию полученных дизъюнкций.
Пример:

X
Y
Z
F
СДНФ
СКНФ
0
0
0
1
¬X¬Y¬Z

0
0
1
1
¬X¬YZ

0
1
0
0
X?¬Y?Z

0
1
1
0

X?¬Y?¬Z
1
0
0
0

¬X?Y?Z
1
0
1
1
X¬YZ

1
1
0
0

¬X?¬Y?Z
1
1
1
0

¬X?¬Y?¬Z

СДНФ: (¬X¬Y¬Z)?(¬X¬YZ)?(X¬YZ)

СКНФ: (X?¬Y?Z)(X?¬Y?¬Z)(¬X?Y?Z)(¬X?¬Y?Z)(¬X?¬Y?¬Z)

13. Полные системы функции. Базисы.
(Теорема Поста) Система булевых функций F является полной тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов S0, S1, S, M и L т.е. когда в ней имеется хотя бы одна функция, не сохраняющая 0, хотя бы одна функция, не сохраняющая 1, хотя бы одна не самодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция.
Система булевых функций {f1, f2, …, fm} называется полной, если любая булева функция может быть выражена через функции этой системы с помощью составления из них сложных функций.
Составление сложных функций из элементарных функций системы называется суперпозицией.
Достаточное условие полноты системы:
Пусть система функций {f1, f2, …, fm} (I) полная и любая из функций этой системы может быть выражена через функции g1, g2, …, gl , тогда система { g1, g2, …, gl}(II) тоже полная.
Полная система функций называется базисом, если она перестаёт быть полной при исключении из неё любого элемента.
Полная система функций называется базисом, если любое собственное подмножество данной системы функций уже не является полным.
В базисе не может быть больше четырёх функций.

14. Минимизация булевых функций в классе ДНФ. Карта Карно. Сокращенные ДНФ.
Под минимизацией будем понимать процесс нахождения такого эквивалентного выражения логической функции, которое содержит минимальное число вхождений переменных.
Правила минимизации с использованием карт Карно
1. В карте Карно группы единиц (для получения ДНФ) и группы нулей (для получения КНФ) необходимо обвести четырехугольными контурами. Внутри контура должны находится только одноименные значения функции. Этот процесс соответствует операции склеивания или нахождения импликант данной функции.
2. Количество клеток внути контура должно быть целой степенью двойки (1, 2, 4, 8, 16...).
3. При проведении контуров крайние строки карты (верхние и нижние, левые и правые), а также угловые клетки, считаются соседними (для карт до 4-х переменных).
4. Каждый контур должен включать максимально возможное количество клеток. В этом случае он будет соответствовать простой импликанте.
5. Все единицы (нули) в карте (даже одиночные) должны быть охвачены контурами. Любая единица (нуль) может входить в контуры произвольное количество раз.

6. Множество контуров, покрывающих все 1 (0) функции образуют тупиковую ДНФ (КНФ). Целью минимизации является нахождение минимальной из множества тупиковых форм.
7. В элементарной конъюнкции (дизъюнкции), которая соответствует одному контуру, остаются только те переменные, значение которых не изменяется внутри обведенного контура. Переменные булевой функции входят в элементарную коньюнкцию (для значений функции 1) без инверсии, если их значение на соответствующих координатах равно 1 и с инверсией - если 0. Для значений булевой функции, равных 0, записываются элементарные дизьюнкции, куда переменные входят без инверсии, если их значение на соответствующих координатах равно 0 и с инверсией - если 1.
Пример карты Карно:
ДНФ, являющаяся дизъюнкцией всех простых импликант функции f, называется сокращенной ДНФ.
Алгоритм построения сокращенной ДНФ:
1. составить какую-либо КНФ функции (можно СКНФ);
2. раскрыть скобки;
3. удалить нулевые члены, поглащаемые и дублирующие, т.е. . . K1K2VK1? K1, K1VK1? K1.
Полученная ДНФ состоит только из простых импликант и является сокращенной.

15.Тупиковая и минимальная ДНФ. Таблица Квайна.
Тупиковой ДНФ будевой функции f(X1,X2,…,Xn) называется ее ДНФ,не определяющая функцию f при вычеркивании из нее хотя бы одного первичного терма. ДНФ функции f, содержащие наименьшее количество первичных термов,называются минимальными.
Каждая булева функция f?0 имеет единственную сокращенную ДНФ,а тупиковых и минимальных может иметь несколько.
Справедливы следующие утверждения.
Теорема 1.Любая минимальная ДНФ является тупиковой.
Теорема 2.Любая тупиковая ДНФ состоит из простых импликант.
Теорема 3.Любая тупиковая ДНФ содержится в сокращенной ДНФ.
Тупиковые ДНФ находятся с помощью таблицы Квайна. Каждой строке в этой таблице взаимно однозначно соответствует максимальный интервал,столбцу-вершина,в которой функция равна1. на пересечении i-й строки и j-го столбца находится единица,j-я вершина входит в i-й максимальный интервал. В противном случае клетку (i,j) не заполняют или ставят в ней 0.
Покрытием столбцов строками называют таоке множество строк, в котором для каждого столбца найдется хотя бы одна строка,на пересечении с которой этот столбец имеет единицу,причем при вычеркивании хотя бы одного элемента из этого множества строк укаазанное свойство не выполняется.
Максимальный интервал называется обязательным,если существует вершина,принадлежащая только ему.Соответствующий этой вершине столбец сожержит только одну единицу. Множество обязательных интервалов образует ядро покрытия.

16.Производная булевых функций. Метод каскадов.
Метод каскадов основан на последовательном исключении переменных с помощью разложения Шеннона.Отметим,что ДНФ,полученная этим методом,может содержать больше первичных термов ,чем минимальная.
Производная dF/dXi от будевой функции f по переменной Xi есть сумма по модулю 2 соответствующих остаточных функций:

dF/dXi=f(X1,X2,…,Xi-1,1,Xi+1,…,Xn)   (((хрень такая-кружок с плюсом внутри)))
(((она же))) f(X1,X2,…,Xi-1,0,Xi+1,…,Xn)
Весом производной P(dF/dXi) называется число различных наборов пременных,на которых она равна единице.
Производная dF/dXi от булевой функции f по переменной Xi определяет условия,при которых эта функция изменяет значение при переключении переменной Xi(то есть при изменении значения Xi с 0 на 1 и наоборот).
Метод каскадов заключается в исключении сначала тех переменных,при которых булева функция переключается при максимальном числе условий.

17.Декопозиция булевых функций. Условие декомпозиции.
Декомпозицией булевой функции f от n переменных называется ее представление в виде композиции функций от меньшего числа аргументов,т.е. f(X1,X2,…,Xn)=F(?1,?2,…,?m),где m<n и для каждого i=1,2,…,m функция ?i= ?i (Xj1,Xj2,…,Xjki), где Ki<n.
Если функция f определена не на всех наборах переменных,то она называется частично определенной. Для таких функций допустимо, чтобы функция F(?1, ?2,…, ?m) имела болшую область определения,но на области определения f значения этих функций должны совпадать.
Условие декомпозиции: декомпозиция возможна,если хотя бы для одного из этих графов логарифм по основанию 2 от хроматического числа не превышает числа переменных в соответствующей группе минус один.

18.Модельные графы.
Мограф-это взвешенный неориентированный граф, вершинами которого являются буквы,вес каждой вершины состоит из множества слов,содержащих эту букву,а любые две вершины соединены ребром,если они оба входят хотя бы в одно общее слово.
Пример мографа