Задачи по теории вероятностей и математической статистике

1. Случайные события

Задача 1. В партии из N изделий n изделий имеют скрытый дефект. Какова вероятность того, что из взятых наугад m изделий k изделий являются дефектными.

$N = 20$, $n = 5$, $m = 4$, $k = 2$.

Решение.

Имеем неупорядоченную выборку без повторений. По классической формуле искомая вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов

$$P(A) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m} = \frac{C_5^2 C_{15}^2}{C_{20}^4} = \frac{5! \cdot 15! \cdot 4! \cdot 16!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 13! \cdot 20!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 4}{2 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = 0{,}217\,.$$

Задача 2. В магазине выставлены для продажи n изделий, среди которых k изделий не качественные. Какова вероятность того, что взятые случайным образом m изделий будут не качественными.

$n = 10$, $k = 4$, $m = 2$.

Решение.

Имеем неупорядоченную выборку без повторений. По классической формуле искомая вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов

$$P(A) = \frac{C_k^m}{C_n^m} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{4! \cdot 2! \cdot 8!}{2! \cdot 2! \cdot 10!} = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15} = 0{,}133\,.$$

Задача 3. На склад с трех предприятий поступает продукция первого и второго сорта. В продукции первого предприятия содержится 15% второсортных изделий, в продукции второго предприятия – 25%, в продукции третьего предприятия – 30%. Чему равна вероятность того, что среди трех изделий (по одному из продукции каждого предприятия) окажутся первосортными два изделия.

Решение.

Обозначим события: A_1 – изделие первого предприятия оказалось первосортным; A_2 – изделие второго предприятия оказалось первосортным; A_3 – изделие третьего предприятия оказалось первосортным.

Тогда вероятность того, что среди трех изделий (по одному из продукции каждого предприятия) окажутся первосортными два изделия будет равна

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3) =$$

$$= P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 0{,}85 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + 0{,}85 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 + 0{,}15 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 = 0{,}19125 + 0{,}14875 + 0{,}07875 = 0{,}4188.$$

Задача 4. В цехе работают три станка. Вероятность отказа в течение смены для станков соответственно равна 0,1, 0,2 и 0,15. Найти вероятность того, что в течение смены безотказно проработают два станка.

Решение.

Обозначим события: A_1 – первый станок в течение смены безотказно проработал; A_2 – второй станок в течение смены безотказно проработал; A_3 – третий станок в течение смены безотказно проработал.

Тогда вероятность того, что в течение смены безотказно проработают два станка будет равна

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3) =$$

$$= P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}85 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 = 0{,}108 + 0{,}153 + 0{,}068 = 0{,}329.$$

Задача 5. Два производственных участка по выпуску однотипной продукции за смену выдали одинаковое количество изделий. Возможный процент брака на первом участке составляет 5%, на втором – 4%. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь, из числа поступивших на склад, не соответствует установленным требованиям.

Решение.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь, из числа поступивших на склад, не соответствует установленным требованиям, равна

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

По условию задачи оба производственных участка за смену выдали одинаковое количество изделий, т.е. $P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5$. Известны также условные вероятности $P(A/H_1) = 0{,}05$, $P(A/H_2) = 0{,}04$. Отсюда искомая вероятность равна

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}04 = 0{,}045.$$

Задача 6. На склад поступило 1500 изделий с первой фабрики и 2000 изделий со второй. Известно, что средний процент нестандартных изделий среди продукции первой фабрики равен 3%, второй – равен 2%. Найти вероятность того, что наудачу взятое со склада изделие будет нестандартным.

Решение.

Вероятность того, что наудачу взятое со склада изделие будет нестандартным, равна

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2),$$

где $P(H_1)$, $P(H_2)$ – вероятности гипотез, что наудачу взятое со склада изделие поступило с первой или второй фабрики, соответственно.

Очевидно, что по классической формуле

$$P(H_1) = \frac{1500}{1500 + 2000} = \frac{1500}{3500} = \frac{3}{7},$$

$$P(H_2) = \frac{2000}{1500 + 2000} = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}.$$

Отсюда искомая вероятность равна

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{3}{7} \cdot 0{,}03 + \frac{3}{7} \cdot 0{,}02 = \frac{0{,}09 + 0{,}06}{7} = \frac{0{,}15}{7} = 0{,}0214.$$

Задача 7. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны наудачу извлечены 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета.

Решение.

Искомое событие A – «извлечены 2 шара разного цвета» означает, что извлечен один белый шар и один черный шар. Воспользуемся классической формулой. Учитывая, что выборка – не упорядоченная и без повторений, имеем

$$P(A)=\frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{4!\cdot 6!\cdot 2!\cdot 8!}{3!\cdot 5!\cdot 10!}=\frac{4\cdot 6\cdot 2}{10\cdot 9}=\frac{8}{15}.$$

Задача 8. В тире имеется пять винтовок, вероятности попадания из которых соответственно равны 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 и 0,9. Стрелок берет наудачу одну из винтовок. Найти вероятность попадания в цель.

Решение.

Воспользуемся формулой полной вероятности. Вероятность попадания в цель равна

$$P(A)=\sum_{i=1}^{5} P(H_i)P(A/H_i),$$

где $P(H_i)$ – вероятность выбора стрелком i-й винтовки, очевидно, что $P(H_i)$ = 1/5, i = 1, … , 5; $P(A/H_i)$ – вероятность попадания стрелком из i-й винтовки, i = 1, … , 5, эти вероятности заданы.

Отсюда имеем

$$P(A)=\sum_{i=1}^{5} P(H_i)P(A/H_i)=\frac{1}{5}\cdot 0{,}5+\ldots+\frac{1}{5}\cdot 0{,}9=\frac{0{,}5+\ldots+0{,}9}{5}=\frac{3{,}5}{5}=0{,}7.$$

Задача 9. Найти вероятность наступления события A ровно 3 раза в 5 независимых испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 1/3.

Решение.

Воспользуемся формулой Бернулли. Искомая вероятность равна

$$P_5(3)=C_5^3 p^3(1-p)^2=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10\cdot 2^2}{3^5}=\frac{40}{243}=0{,}165.$$

Задача 10. Какова вероятность того, что пятизначное число состоит из цифр 0, 1, 2, 3, 4.

Решение.

Вероятность искомого события согласно классической формуле равна

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных элементарных событий, n – общее число элементарных событий.

Определим число благоприятных элементарных событий. Очевидно, что на первом месте может быть любое из четырех чисел 1, 2, 3, 4. На втором месте может быть любое из оставшихся четырех чисел. На третьем месте может быть любое из оставшихся трех чисел. На четвертом месте может быть любое из оставшихся двух чисел. На пятом месте может быть оставшаяся последняя цифра. Поэтому число благоприятных элементарных событий равно

$$m = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Определим общее число элементарных событий. Очевидно, что на первом месте может быть любое из четырех чисел 1, 2, 3, 4. На втором, третьем, четвертом и пятом местах может быть любая из пяти цифр. Поэтому общее число элементарных событий равно

$$n = 4 \cdot 5^4.$$

Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 5^4} = \frac{24}{625} = 0{,}0384.$$

Задача 11. Семь различных шаров произвольно раскладываются по семи различным коробкам. Какова вероятность того, что:

а) в каждой коробку будет по шару;

б) ровно одна коробка окажется пустой.

Решение.

а) Вероятность искомого события согласно классической формуле равна

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных элементарных событий, n – общее число элементарных событий.

Так как по условию шары различны, то число благоприятных элементарных событий равно числу перестановок $m = 7!$. Общее число элементарных событий равно (выборка упорядоченная с повторениями) $n = 7^7$.

Отсюда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7!}{7^7} = \frac{6!}{7^6} = \frac{720}{117649} = 0{,}0061.$$

б) Вероятность искомого события согласно классической формуле равна

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных элементарных событий, n – общее число элементарных событий.

Так как по условию шары различны и один ящик должен быть пустым, то число благоприятных элементарных событий равно

$$m = m_1 m_2 m_3 = 7 \cdot 6 \cdot 6!,$$

где $m_1 = 7$ – число вариантов выбора одной пустой коробки из 7;

$m_2 = 6$ – число вариантов размещения одного шара в одну из шести не пустых корзин;

$m_3 = 6!$ – число перестановок шести оставшихся шаров по шести не пустым корзинам.

Общее число элементарных событий равно (выборка упорядоченная с повторениями) $n = 7^7$. Отсюда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 6!}{7^7} = \frac{6 \cdot 6!}{7^6} = \frac{4320}{117649} = 0{,}0367.$$

Задача 12. Сообщение передается одновременно по n каналам связи, причем для надежности по каждому каналу оно повторяется k раз. При одной передаче сообщения (независимо от других) искажается с вероятностью p. Каждый канал связи (независимо от других) «забивается» помехами с вероятностью q, забитый канал не может передавать сообщения. Найти вероятность того, что адресат получит сообщение без искажений.

Решение.

Определим вероятность того, что произвольный канал связи передаст сообщение без искажений. Обозначим событие A – произвольный канал связи передаст сообщение с искажениями или не сможет передать сообщение. Тогда

$$P(\overline{A}) = (p + q - pq)^k.$$

Поскольку адресат получит сообщение без искажений, если хотя бы один из n каналов связи передаст сообщение без искажений. Тогда вероятность того, что адресат получит сообщение без искажений, равна

$$P(B) = 1 - \left[P(\overline{A})\right]^n = 1 - (p + q - pq)^{nk}.$$

Задача 13. Среди поступающих на склад деталей 30% из цеха 1, 70% – из цеха 2. Вероятность брака для цеха 1 равна 0,02, для цеха 2 – 0,03. Наудачу взятая деталь оказалась доброкачественной. Какова вероятность того, что она изготовлена в цехе 1?

Решение.

Обозначим гипотезы: H_1 – деталь поступила из цеха 1, H_2 – деталь поступила из цеха 2. Очевидно, что $P(H_1) = 0{,}7$, $P(H_1) = 0{,}3$. Далее обозначим A – наудачу взятая деталь оказалась доброкачественной. По условию задачи имеем: $P(A/H_1) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$, $P(A/H_2) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$. Тогда по формуле Байеса искомая вероятность равна

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} =$$

$$= \frac{0{,}7 \cdot 0{,}98}{0{,}7 \cdot 0{,}98 + 0{,}3 \cdot 0{,}97} = \frac{0{,}686}{0{,}686 + 0{,}291} = \frac{0{,}686}{0{,}977} = 0{,}7021.$$

Задача 14. В тираже «Спортлото 6 из 49» участвует 10000000. Найти вероятность события A – хотя бы в одной из этих карточек зачеркнуты 6 выигрышных номеров.

Решение.

Вероятность угадать в одном билете 6 цифр из 49 равна

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_6^6}{C_{49}^6} = \frac{6! \cdot 43!}{49!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{1}{49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44} = \frac{1}{13983816}.$$

Т.к. $\lambda = np = \frac{10000000}{13983816} = 0{,}7151 < 5$ – мало, то вероятность того, что никто не угадает все 6 выигрышных номеров равна

$$P(m = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} = e^{-0{,}7151} = 0{,}4891.$$

Отсюда искомая вероятность равна

Имеем $P(A) = 1 - P(m = 0) = 1 - 0{,}4891 = 0{,}5109$.

Задача 15. В урне находится 12 шаров: 8 белых и 4 красных. Какова вероятность того, что выбранные наугад два шара будут одного цвета.

Решение.

Вероятность искомого события равна

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2),$$

где $P(A_1)$ – вероятность того, что выбраны два белых шара; $P(A_2)$ – вероятность того, что выбраны два красных шара.

По классической формуле, считая выборки неупорядоченными и без повторений, имеем

$$P(A_1)=\frac{C_8^2}{C_{12}^2},\ P(A_2)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}.$$

Отсюда

$$P(A)=\frac{C_8^2+C_4^2}{C_{12}^2}=\left(\frac{8!}{2!\cdot 6!}+\frac{4!}{2!\cdot 2!}\right)\cdot\frac{2!\cdot 10!}{12!}=\frac{28+6}{66}=\frac{34}{66}=\frac{17}{33}.$$

Задача 16. В первом ящике находится 5 белых и 3 черных шара, а во втором – 3 белых и 5 черных. Из первого ящика перекладывают во второй наугад два шара, а затем берут из второго один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется черным.

Решение.

Переложить из второго ящика можно: 2 белых шара (гипотеза H_1); 1 белый и 1черный шар (гипотеза H_2); 2 черных шара (гипотеза H_3).

Вероятность гипотезы H_1 равна

$$P(H_1)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{2!\cdot 6!}{8!}=\frac{6}{8\cdot 7}=\frac{3}{28}.$$

Вероятность гипотезы H_3 равна

$$P(H_1)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{2!\cdot 6!}{8!}=\frac{5\cdot 4}{8\cdot 7}=\frac{10}{28}.$$

Отсюда вероятность гипотезы H_2 равна

$$P(H_2)=1-\frac{3}{28}-\frac{10}{28}=\frac{15}{28}.$$

Обозначим искомое событие A – «выбран черный шар».

Определим по классической формуле условные вероятности:

$$P(A/H_1)=\frac{5}{6};\ P(A/H_2)=\frac{4}{6};\ P(A/H_3)=\frac{3}{6}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{3}{28}\cdot\frac{5}{6}+\frac{10}{28}\cdot\frac{4}{6}+\frac{15}{28}\cdot\frac{3}{6}=\frac{15+40+45}{28\cdot 6}=\frac{100}{168}.$$

Задача 17. Бросают игральный кубик. Какова вероятность того, что выпало четное число очков, если известно, что число выпавших очков меньше пяти?

Решение.

Рассмотрим возможные исходы. Выпасть может 1, 2, 3 или 4, т.е. всего четыре исхода. Благоприятных исходов всего два (выпадет 2 или 4). Отсюда по классической формуле вероятность искомого события равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Задача 19. Была проведена одна и та же контрольная работа в трех группах. В первой группе из 30 студентов 8 выполнили работу на «отлично», во второй, где 28 студентов, – 6 «отличных» работ, в третьей, где 27 студентов, – 9 работ выполнены на «отлично». Найти вероятность того, что первая выбранная наудачу работа из работ, принадлежащих группе, которая также выбрана наудачу, окажется «отличной».

Решение.

Имеем три гипотезы: H_1 – выбрана работа из 1-й группы, H_2 – выбрана работа из 1-й группы, H_3 – выбрана работа из 1-й группы. Очевидно, что

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Обозначим искомое событие A – выбрана работа, выполненная на «отлично». Определим по классической формуле условные вероятности:

$$P(A/H_1) = \frac{8}{30};\ P(A/H_2) = \frac{6}{28};\ P(A/H_3) = \frac{9}{27}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{30} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{28} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{27} = \frac{1}{3}\cdot\frac{8\cdot 28\cdot 27 + 6\cdot 30\cdot 27 + 9\cdot 30\cdot 28}{30\cdot 28\cdot 27} =$$

$$\frac{19}{70} \approx 0{,}271.$$

Задача 20. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы одинаковы и равны 0,9; на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент ответит: а) на все вопросы; б) по крайней мере, на два вопроса.

Решение.

а) Очевидно, что события A_1, A_2, A_3 – ответы на 1-й, 2-й и 3-й вопросы не зависимы. Поэтому вероятность искомого события равна

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}8 = 0{,}648.$$

б) Искомая вероятность равна

$P(B) = P(B_2 + B_3) =$[события B_2 (студент ответит ровно на два вопроса) и B_3 (студент ответит ровно на три вопроса) несовместны] $= P(B_2) + P(B_3)$.

$$P(B_2) = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}162 + 0{,}072 + 0{,}072 = 0{,}306.$$

$$P(B_3) = P(A) = 0{,}648.$$

Отсюда

$$P(B) = P(B_2) + P(B_3) = 0{,}306 + 0{,}648 = 0{,}954.$$

Задача 21. В правом и левом карманах имеются по три монетки в 10 коп и по четыре монетки в 5 коп. Из правого кармана в левый наудачу перекладывается 5 монет. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания монеты достоинством в 10 коп.

Решение.

В правом кармане после перекладывания в левый пяти монет могут остаться:

- две монеты в 10 коп, что соответствует случаю (гипотезе) H_1 наличия в левом кармане четырех монет в 10 коп и восьми монет в 5 коп;
- по одной монете в 10 и 5 коп, что соответствует случаю (гипотезе) H_2 наличия в левом кармане пяти монет в 10 коп и семи монет в 5 коп;
- две монеты в 5 коп, что соответствует случаю (гипотезе) H_3 наличия в левом кармане шести монет в 10 коп и шести монет в 5 коп.

Пусть A – искомое событие (после перекладывания из левого кармана извлечена монета достоинством в 10 коп).

Определим вероятности гипотез:

$$P(H_1) = \frac{C_3^1 C_4^4}{C_7^5} = \frac{3! \cdot 5! \cdot 2!}{2! \cdot 7!} = \frac{1}{7},$$

$$P(H_2) = \frac{C_3^2 C_4^3}{C_7^5} = \frac{3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 2!}{2! \cdot 3! \cdot 7!} = \frac{4}{7},$$

$$P(H_3) = \frac{C_3^3 C_4^2}{C_7^5} = \frac{4! \cdot 5! \cdot 2!}{2! \cdot 2! \cdot 7!} = \frac{2}{7}.$$

Определим далее условные вероятности:

$$P(A/H_1)=\frac{4}{12},\ P(A/H_2)=\frac{5}{12},\ P(A/H_1)=\frac{6}{12}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности получим

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{12}+\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{12}+\frac{2}{7}\cdot\frac{6}{12}=\frac{36}{84}=\frac{3}{7}.$$

Задача 22. В результате систематически проводимого контроля качества изготовляемых предприятием деталей установлено, что брак составляет в среднем 5%. Сколько изготовленных деталей нужно взять, чтобы наиболее вероятное число годных среди них было равно 60 шт.?

Решение.

Известно, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p наиболее вероятным числом успехов является

- единственное число $k_0 = [np + p]$, если число $np + p$ не целое;
- два числа $k_0 = np + p$ и $k_0 = np + p - 1$, если число $np + p$ целое.

Согласно условию задачи $k_0 = 60$, $p = 5\% = 0{,}05$. Отсюда

$$np + p = (n+1)p = \frac{n+1}{20} = 60,$$

следовательно, изготовленных деталей нужно взять

$$n = 60\cdot 20 - 1 = 1199.$$

Задача 23. У фотолюбителя в коробке находится 5 одинаковых кассет с фотопленками, из которых 3 пленки уже отсняты, а две – чистые. Будучи не в состоянии установить, какие из них отсняты, он решает отобрать наугад две пленки, а остальные проявить. Какова вероятность того, что в отобранных пленках окажутся чистыми: а) обе пленки; б) хотя бы одна пленка?

Решение.

а) Вероятность искомого события равна:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – благоприятное число исходов, n – общее число исходов.

В данном случае имеем выборку неупорядоченную без повторений. Поэтому:

$$m = C_2^2 = 1;\ n = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10.$$

Отсюда вероятность того, что обе отобранные пленки окажутся чистыми, равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

б) Вероятность того, что из отобранных двух пленок окажется чистой хотя бы одна пленка, равна:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}),$$

где $P(\overline{B})$ – вероятность противоположного события (обе пленки отсняты).

Очевидно, что

$$P(\overline{B}) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} \cdot \frac{2!\cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Отсюда вероятность того, что из отобранных двух пленок окажется чистой хотя бы одна пленка, равна:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}4.$$

Задача 24. Укупорка банок томатного сока производится двумя автоматами, продукция которых поступает на общий конвейер. Производительность второго автомата в 1,5 раза выше производительности первого. Доля банок с дефектами упаковки в среднем составляет 0,5% – у первого и 0,02% – у второго автомата. Какова вероятность того, что взятая наугад банка сока будет иметь дефекты упаковки?

Решение.

Обозначим искомое событие A – «взятая наугад банка сока будет иметь дефекты упаковки». Вероятность этого события по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) P(A \setminus H_i), \qquad (1)$$

где H_i – гипотезы, означающие: H_1 – укупорка банки томатного сока произведена первым автоматом; H_2 – укупорка банки томатного сока произведена вторым автоматом;

$P(A \setminus H_i)$ – условные вероятности события A при выполнении указанных гипотез.

Очевидно, что $P(A \setminus H_1) = 0{,}005$, $P(A \setminus H_2) = 0{,}0002$.

Определим далее вероятности гипотез $P(H_i)$, учитывая, что:

$$P(H_1) + P(H_2) = 1; \qquad (2)$$

$$P(H_2) = 1{,}5 P(H_1). \qquad (3)$$

Подставив равенство (3) в уравнение (2), получим $2{,}5 P(H_1) = 1$, откуда получим

$$P(H_1) = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4 .$$

Отсюда определим вероятность второй гипотезы

$$P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6 .$$

Подставив найденные вероятности в формулу (1), получим:

$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}005 + 0{,}6 \cdot 0{,}0002 = 0{,}00212$, или 0,212%.

Задача 25. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что вынутые наугад два шара окажутся белыми?

Решение.

Вероятность искомого события равна:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – благоприятное число исходов, n – общее число исходов.

В данном случае имеем выборку неупорядоченную без повторений. Поэтому:

$$m = C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3;$$

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 .$$

Отсюда вероятность того, что обе отобранные пленки окажутся чистыми, равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15} .$$

Задача 26. Студент знает 25 вопросов из 35. Ему наудачу задали три вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит на все три вопроса? Задачу решить двумя способами – с помощью классического определения вероятности и с помощью алгебры событий.

Решение.

1) Решение с помощью классического определения вероятности.

Вероятность искомого события равна:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – благоприятное число исходов, n – общее число исходов.

В данном случае имеем выборку неупорядоченную без повторений. Поэтому:

$$m = C_{25}^{3} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3;$$

$$n = C_{35}^{3} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Отсюда вероятность того, что обе отобранные пленки окажутся чистыми, равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{25!}{3! \cdot 22!} \cdot \frac{3! \cdot 32!}{35!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 23}{7 \cdot 17 \cdot 11} = \frac{460}{1309} = 0{,}351.$$

2) Решение с помощью алгебры событий.

Искомое событие A произойдет, если студент ответит правильно на первый вопрос, затем ответит правильно на второй вопрос и затем ответит правильно на третий вопрос. Отсюда

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3,$$

где A_i – событие «студент ответил правильно на i-й вопрос», $i = 1, 2, 3$.

По теореме умножения вероятностей имеем

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{25}{35} \cdot \frac{25-1}{35-1} \cdot \frac{25-2}{35-2} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{35 \cdot 34 \cdot 33} = 0{,}351.$$

Задача 27. Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течение часа составляет 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвертой – 0,1; если по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?

Решение.

В данном случае событие A (турист через час он вышел из леса) произошло. Поэтому используем формулу Байеса. Искомая вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса, равна

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{5} P(H_i)P(A/H_i)},$$

где H_i – гипотеза «турист пойдет по i-й дороге, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Очевидно, что все пять гипотез равновероятны, т.е.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = P(H_5) = \frac{1}{5}.$$

Значения условных вероятностей даны в условии задачи:

$$P(A/H_1) = 0{,}6;\ P(A/H_2) = 0{,}3;\ P(A/H_3) = 0{,}2;\ P(A/H_4) = P(A/H_5) = 0{,}1.$$

Отсюда имеем:

$$P(H_1/A)=\frac{\frac{1}{5}\cdot 0{,}6}{\frac{1}{5}\cdot 0{,}6+\frac{1}{5}\cdot 0{,}3+\frac{1}{5}\cdot 0{,}2+\frac{1}{5}\cdot 0{,}1+\frac{1}{5}\cdot 0{,}1}=\frac{0{,}6}{0{,}6+0{,}3+0{,}2+0{,}1+0{,}1}=\frac{0{,}6}{1{,}3}=0{,}462\,.$$

Задача 28. В магазине 5 холодильников. Вероятность выхода из строя каждого холодильника в течение года равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение года ремонта потребует: 1) 4 холодильника; 2) не менее 2 холодильников; 3) не более 1 холодильника; 4) не менее 1 холодильника.

Решение.

Поскольку все холодильники имеют одинаковую вероятность выхода из строя в течение года $p=0{,}2$, то используем схему Бернулли.

1) Вероятность того, что в течение года ремонта потребуют 4 холодильника, равна

$P_5(m=4)=C_5^4\,p^4(1-p)=5\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8=0{,}0064\,.$

2) Вероятность того, что в течение года ремонта потребуют не менее 2 холодильников, равна

$P_5(m\geq 2)=1-P_5(m<2)=1-P_5(m=0)-P_5(m=1)=.$

$$=1-C_5^0\,p^0(1-p)^5-C_5^1\,p^1(1-p)^4=1-1\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5-5\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^4=\frac{26272}{100000}=0{,}2627\,.$$

3) Вероятность того, что в течение года ремонта потребует не более 1 холодильника, равна

$P_5(m\leq 1)=1-P_5(m\geq 2)=1-0{,}2627=0{,}7373\,.$

4) Вероятность того, что в течение года ремонта потребует не менее 1 холодильника, равна

$P_5(m\geq 1)=1-P_5(m<1)=1-P_5(m=0)=$

$$=1-C_5^0\,p^0(1-p)^5=1-1\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5=\frac{67232}{100000}=0{,}6723\,.$$

Задача 29. Из шести букв М, А, Ш, И, Н, А выбираются одна за другой и приставляются друг к другу в порядке выбора четыре буквы. Какова вероятность того, что при этом получится слово: а) «ШИНА»; б) «МАША».

Решение.

а) По теореме умножения вероятностей вероятность того, что получится слово «ШИНА» равна

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)P(A_4/A_1A_2A_3) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6-1}\cdot\frac{1}{6-2}\cdot\frac{2}{6-3} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{180}.$$

б) По теореме умножения вероятностей вероятность того, что получится слово «МАША» равна

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)P(A_4/A_1A_2A_3) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6-1}\cdot\frac{1}{6-2}\cdot\frac{2-1}{6-3} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{180}.$$

Задача 30. Для трех розничных торговых предприятий определен плановый уровень прибыли. Вероятность того, что первое предприятие выполнит план прибыли, равна 90%, для второго она составляет 95%, для третьего 100%. Какова вероятность того, что плановый уровень прибыли будет достигнут: а) всеми предприятиями; б) только двумя предприятиями; в) хотя бы одним предприятием.

Решение.

а) Поскольку предприятия работают независимо друг от друга, то по теореме умножения вероятностей вероятность того, что плановый уровень прибыли будет достигнут всеми предприятиями равна

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 1 = 0{,}855.$$

б) Поскольку третье предприятие всегда выполнит план (событие достоверное), то искомая вероятность равна:

$$P(B) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = 0{,}9\cdot(1-0{,}95) + (1-0{,}9)\cdot 0{,}95 = 0{,}14.$$

в) Поскольку третье предприятие всегда выполнит план (событие достоверное), то вероятность данного события равна $P(C) = 1$.

Задача 31. Число грузовых машин, проезжающих мимо колонки, относится к числу легковых как 3:2. Вероятность того, что грузовая машина будет заправляться, равна 0,1, а того, что будет заправляться легковая 0,2. У бензоколонки заправляется машина. Какова вероятность того, что это грузовая машина?

Решение.

В данном случае событие A (машина заправляется) произошло. Поэтому используем формулу Байеса. Искомая вероятность того, что заправляется грузовая машина, равна

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(H_i)P(A/H_i)},$$

где H_1 – гипотеза «проехала грузовая машина», H_2 – гипотеза «проехала легковая машина».

Определим вероятности гипотез:

$P(H_1) + P(H_2) = 2\alpha + 3\alpha = 1$, следовательно $\alpha = \frac{1}{5}$, и

$$P(H_1) = \frac{3}{5},\ P(H_2) = \frac{2}{5}.$$

Значения условных вероятностей даны в условии задачи:

$$P(A/H_1) = 0{,}1;\ P(A/H_2) = 0{,}2.$$

Отсюда имеем:

$$P(H_1/A) = \frac{\frac{3}{5}\cdot 0{,}1}{\frac{3}{5}\cdot 0{,}1 + \frac{2}{5}\cdot 0{,}2} = \frac{0{,}06}{0{,}06+0{,}08} = \frac{0{,}06}{0{,}14} = 0{,}429.$$

Задача 32. Вероятность поломки одного из пяти работающих независимо друг от друга станков равна 0,2. Если происходит поломка, станок до конца дня работает. Какова вероятность того, что: а) 2 станка сломаются в течение дня; б) не менее одного станка будут работать исправно?

Решение.

Поскольку все холодильники имеют одинаковую вероятность выхода из строя в течение дня $p = 0{,}2$, то используем схему Бернулли.

а) Вероятность того, что 2 станка сломаются в течение дня, равна

$$P_5(m=2) = C_5^2 p^2 (1-p)^3 = 10\cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048.$$

б) Вероятность того, что не менее одного станка будут работать исправно, равна

$$P_5(m \le 4) = 1 - P_5(m=5) = .$$

$$= 1 - C_5^5 p^5 (1-p)^0 = 1 - 1\cdot 0{,}2^5 = 1 - 0{,}00032 = 0{,}99968.$$

Задача 33. Студент сдает три экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,9, второго – 0,65, третьего – 0,35. Найти вероятность того, что он не сдаст хотя бы один экзамен.

Решение.

Обозначим A – событие «студент не сдал хотя бы один экзамен». Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}),$$

где $\overline{A}$ – противоположное событие «студент сдал все экзамены».

Поскольку сдача каждого экзамена не зависит от других экзаменов, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35 = 0{,}7953.$$

Задача 34. Из 36 карт наугад выбираются 3. Вычислите вероятность того, что среди них будут король и дама.

Решение.

Вероятность искомого события равна:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – благоприятное число исходов, n – общее число исходов.

В данном случае благоприятными могут быть варианты, когда одна из выбранных карт – король, вторая – дама, а третья может быть любой, в частности и королем, и дамой.

Поскольку порядок выбора карт не имеет значения, то имеем выборку неупорядоченную без повторений. Поэтому:

$$m = C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{34}^1 = 4 \cdot 4 \cdot 34;$$

$$n = C_{36}^3 = \frac{36!}{33! \cdot 3!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{3 \cdot 2} = 6 \cdot 35 \cdot 34.$$

Отсюда вероятность того, что среди трех выбранных карт будут король и дама, равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 34}{6 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{8}{105} = 0{,}076.$$

Задача 35. Девять карточек, пронумерованных от 1 до 9, расположены друг за другом в случайном порядке. Определите вероятность события: карточка № 1 находится среди первых трех, а карточка № 2 – среди последних четырех.

Решение.

Вероятность искомого события равна:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – благоприятное число исходов, n – общее число исходов.

Поскольку все карточки пронумерованы, то выборки являются упорядоченными. В данном случае благоприятными могут быть варианты, когда:

- среди первых трех карточках содержится карточка № 1, не содержится карточка № 2, а остальными двумя карточками могут быть любые из семи оставшихся; число всех таких вариантов равно $m_1 = A_3^1 A_7^2 = \frac{3!}{2!}\cdot\frac{7!}{5!} = 3\cdot 7\cdot 6$;
- среди последних четырех карточек содержится карточка № 2, а остальными тремя карточками могут быть любые из пяти оставшихся; число всех таких вариантов равно $m_2 = A_4^1 A_5^3 = \frac{4!}{3!}\cdot\frac{5!}{2!} = 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3$;
- четвертой и пятой карточками могут быть две оставшиеся карточки; число всех таких вариантов равно $m_3 = A_2^2 = 2! = 2$.

Очевидно, что общее число исходов равно:

$$n = A_9^9 = 9!$$

Отсюда вероятность искомого события равна:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{m_1\cdot m_2\cdot m_3}{n}=\frac{3\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=\frac{1}{6}=0{,}167.$$

Задача 36. Вероятность того, что изделие является дефектным, равна 0,1. Сколько надо выбрать изделий, чтобы среди них с вероятностью более 0,96 оказалось хотя бы одно бездефектное?

Решение.

По условию задачи требуется найти минимальное число n, для которого выполнялось бы неравенство:

$$P_n(k\ge 1) > 0{,}96.$$

Данное неравенство равносильно тому, что

$$P_n(k=0) = C_n^0 p^n q^0 < 1-0{,}96 = 0{,}04.$$

Подставив $p=0{,}9$, $q=0{,}1$ в последнее неравенство, и, учтя, что $C_n^0 = 1$, имеем:

$$P_n(k=0)=C_n^0 p^n q^0 =1\cdot 0{,}9^n\cdot 0{,}1^0 =0{,}9^n <0{,}04\,.$$

Прологарифмируем обе части полученного неравенства:

$$n\ln 0{,}9>\ln 0{,}04 \Rightarrow n>\frac{\ln 0{,}04}{\ln 0{,}9}=\frac{-3{,}2189}{-0{,}1054}=30{,}551 \Rightarrow n_{\min}=31\,.$$

Таким образом, надо выбрать не менее чем 31 изделие, чтобы среди них с вероятностью более 0,96 оказалось хотя бы одно бездефектное

Задача 37. Адвокат выигрывает в суде в среднем 70% дел. Найдите вероятность того, что он из 8 дел выиграет больше половины.

Решение.

По условию задач требуется определить вероятность $P_8(k>4)$, где k – количество выигранных дел. Поскольку вероятность выигрыша дела известна ($p=0{,}7$), то $q=1-p=1-0{,}7=0{,}3$. Отсюда по формуле Бернулли имеем:

$$P_8(k>4)=P_8(k=5)+P_8(k=6)+P_8(k=7)+P_8(k=8)=$$

$$=C_8^5\cdot 0{,}7^5\cdot 0{,}3^3+C_8^6\cdot 0{,}7^6\cdot 0{,}3^2+C_8^7\cdot 0{,}7^7\cdot 0{,}3^1+C_8^8\cdot 0{,}7^8\cdot 0{,}3^0=$$

$$=0{,}2450+0{,}2965+0{,}1776+0{,}0576=0{,}797\,.$$

Таким образом, вероятность того, что адвокат из 8 дел выиграет больше половины, равна 0,797.

Задача 38. 1/3 ламп производится на первом заводе, 1/4 – на втором, остальные – на третьем. Вероятности брака в продукции первого, второго и третьего заводов соответственно равны 0,2, 0,15 и 0,05. Найдите вероятность того, что бракованная лампа произведена на первом, втором или третьем заводе.

Решение.

В данном случае событие A (лампа оказалась бракованной) произошло. Поэтому используем формулу Байеса. Искомые вероятности того, что бракованная лампа произведена на k-м заводе ($k=1,2,3$) равны:

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{5}P(H_i)P(A/H_i)}\,,$$

где H_k – гипотеза «лампа произведена на k-м заводе, $k=1,2,3$.

Из условия задачи имеем:

$$P(H_1) = \frac{1}{3};\ P(H_2)\frac{1}{4};\ P(H_3) = 1 - P(H_1) = P(H_2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Значения условных вероятностей даны в условии задачи:

$$P(A/H_1) = 0{,}2;\ P(A/H_2) = 0{,}15;\ P(A/H_3) = 0{,}05.$$

Отсюда имеем:

$$P(H_1/A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}2}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}15 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}05} = \frac{\frac{0{,}2}{3}}{\frac{1}{12}\cdot 1{,}5} = \frac{0{,}8}{1{,}5} = 0{,}533;$$

$$P(H_2/A) = \frac{\frac{1}{4}\cdot 0{,}15}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}15 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}05} = \frac{\frac{0{,}15}{4}}{\frac{1}{12}\cdot 1{,}5} = \frac{0{,}45}{1{,}5} = 0{,}3;$$

$$P(H_3/A) = \frac{\frac{5}{12}\cdot 0{,}05}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}15 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}05} = \frac{\frac{0{,}25}{12}}{\frac{1}{12}\cdot 1{,}5} = \frac{0{,}25}{1{,}5} = 0{,}167.$$

Задача 39. В библиотеке имеется 5 методичек выпуска 1992 года и 9 методичек по той же теме выпуска 1996 года. Библиотекарь выдает на группу 6 методичек. Какова вероятность того, что первой пришедшей группе будет выдано 5 методичек выпуска 1996 года, если библиотекарь берет методички произвольно?

Решение.

Пусть A – искомое событие. Согласно классической формуле вероятность искомого события равна:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – количество благоприятных исходов; n – количество благоприятных исходов.

Имеем неупорядоченную выборку (порядок выбора методичек не имеет значения) без повторений (одну и ту же методичку нельзя взять два раза). Следовательно, имеем:

$$m = C_9^5 C_5^1 = \frac{9!}{5!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{1!\cdot 4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 9\cdot 2\cdot 7\cdot 5 = 630,$$

$$n = C_{14}^6 = \frac{14!}{6!\cdot 8!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 14\cdot 13\cdot 11\cdot 3\cdot 4 = 24024.$$

Отсюда вероятность того, что первой пришедшей группе будет выдано 5 методичек выпуска 1996 года равна

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{630}{24024}=\frac{210}{8008}=\frac{105}{4004}=0{,}026\,.$$

Задача 40. Из N = 28 частных банков, работающих в городе, нарушения в уплате налогов имеют место в M = 12 банках. Налоговая инспекция проводит проверку трех банков, выбирая их из N банков случайным образом. Выбранные банки проверяются независимо один от другого. Допущенные в проверяемом банке нарушения могут быть выявлены инспекцией с вероятностью p = 0,7. Какова вероятность того, что в ходе проверки будет установлен факт наличия среди частных банков города таких банков, которые допускают нарушения в уплате налогов?

Решение.

Обозначим через A случайное событие, вероятность которого надо определить: A – в ходе проверки будет установлен факт наличия среди частных банков города таких банков, которые допускают нарушения в уплате налогов.

Введем гипотезы: H_i – среди выбранных для проверки трех банков ровно в i банках имеют место нарушения в уплате налогов, где i = 0; 1; 2; 3; события H_0, H_1, H_2, H_3 образуют полную группу несовместных событий.

Вероятность события A можно будет найти по формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A/H_i)\,.$$

Вычислим вероятности гипотез:

$$P(H_0)=\frac{C_{12}^0C_{16}^3}{C_{28}^3}=\frac{C_{16}^3}{C_{28}^3}=\frac{16!3!25!}{3!13!28!}=\frac{4\cdot 5}{9\cdot 13}=\frac{20}{117}=0{,}1709\,,$$

$$P(H_1)=\frac{C_{12}^1C_{16}^2}{C_{28}^3}=\frac{12!16!3!25!}{1!11!2!14!28!}=\frac{8\cdot 5}{7\cdot 13}=\frac{40}{91}=0{,}4396\,,$$

$$P(H_2)=\frac{C_{12}^2C_{16}^1}{C_{28}^3}=\frac{12!16!3!25!}{2!10!1!15!28!}=\frac{11\cdot 8}{7\cdot 3\cdot 13}=\frac{88}{273}=0{,}3223\,,$$

$$P(H_3)=\frac{C_{12}^3C_{16}^0}{C_{28}^3}=\frac{C_{12}^3}{C_{28}^3}=\frac{12!3!25!}{3!9!28!}=\frac{11\cdot 5}{7\cdot 9\cdot 13}=\frac{55}{819}=0{,}0672\,.$$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{3}P(H_i)=0{,}1709+0{,}4396+0{,}3223+0{,}0672=1.$$

Найдем условные вероятности события A относительно каждой гипотезы, т.е. найдем вероятности того, что нарушения в уплате налогов будут выявлены хотя бы в одном из проверяемых трех банков в каждом рассматриваемом случае. Вероятность $P(A/H_i)$ можно найти по формуле (т.к. банки проверяются независимо один от другого)

$P(A/H_i) = 1–(1–p)^{i}$, где $i = 0; 1; 2; 3$; $p = 0,7$.

$P(A/H_0) = 1–(1–p)^0=1– (1–0,7)^0 = 1–1 = 0$, действительно, событие A и H_0 несовместны.

$P(A/H_1) = 1–(1–p)^1=1– (1–0,7)^1 = 1–1+0,7 = 0,7$.

$P(A/H_2) = 1–(1–p)^2=1– (1–0,7)^2 = 1–0,09 = 0,91$.

$P(A/H_3) = 1–(1–p)^3=1– (1–0,7)^3 = 1–0,027 = 0,973$.

Используя формулу полной вероятности, найдем

$$P(A) = 0{,}1709\cdot 0 + 0{,}4396\cdot 0{,}7 + 0{,}3223\cdot 0{,}91 + 0{,}0672\cdot 0{,}973 = 0{,}6664.$$

Задача 41. В телеателье имеется три кинескопа. Вероятности неисправности каждого из них соответственно равны 0,1; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что среди этих кинескопов исправными окажутся: а) два кинескопа; б) хотя бы один кинескоп.

Решение.

а) Обозначим события A_1, A_2, A_3 – исправным оказался 1-й, 2-й, 3-й кинескоп, соответственно. Очевидно, что эти события независимые. Тогда вероятность того, что среди трех кинескопов исправными окажутся два, равна

$$P(B) = P(A_1A_2\overline{A_3}) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9 + 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}072 + 0{,}162 + 0{,}072 = 0{,}306.$$

б) Обозначим C – событие «среди трех кинескопов исправным окажется хотя бы один». Его вероятность равна

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}) = 1 - 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}002 = 0{,}998.$$

Задача 42. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 3% брака, второй – 2% и третий – 4%. Найти вероятность того, что на сборку попадет бракованная деталь, если с первого автомата поступает 100, со второго – 200, с третьего – 250 деталей.

Решение.

Обозначим A – искомое событие «на сборку попадет бракованная деталь». Имеем три гипотезы: H_1 – деталь поступила с 1-го автомата, H_2 – деталь поступила с 2-го автомата, H_3 – деталь поступила с 3-го автомата. Их вероятности по классической формуле равны:

$$P(H_1) = \frac{100}{100+200+250} = \frac{100}{550} = \frac{2}{11},$$

$$P(H_2) = \frac{200}{550} = \frac{4}{11},$$

$$P(H_3) = \frac{250}{550} = \frac{5}{11}.$$

В условии задачи даны условные вероятности:

$P(A/H_1) = 0{,}03$, $P(A/H_2) = 0{,}02$, $P(A/H_3) = 0{,}04$.

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{2}{11}\cdot 0{,}03 + \frac{4}{11}\cdot 0{,}02 + \frac{5}{11}\cdot 0{,}04 = \frac{0{,}3}{11} = 0{,}273.$$

Задача 43. Пароль для входа в компьютерную базу данных состоит из 7 цифр. Какова вероятность правильного набора пароля с первого раза, если комбинация цифр является строго возрастающей последовательностью.

Решение.

Обозначим через A – рассматриваемое событие. Воспользуемся классической формулой для вычисления вероятности события $P(A)$:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных событию A случаев; n – число всех случаев.

Очевидно, что правильный номер единственный, следовательно, $m = 1$.

Определим число всех случаев n. Всего имеем 10 цифр. Расположим эти цифры по возрастанию: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Очевидно, что все возможные варианты можно получить путем выбора из этой последовательности любых трех цифр без повторения (этих цифр не будет в пароле). Поэтому

$$n = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120.$$

Итак, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120} = 0{,}00833$.

Задача 44. Каждый из 4 свидетелей может указать на один из 4 предметов. Свидетели выбирают предметы случайно и независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что все свидетели укажут на один и тот же предмет;

Решение.

Обозначим через A – рассматриваемое событие. Воспользуемся классической формулой для вычисления вероятности события $P(A)$:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных событию A случаев; n – число всех случаев.

Предметов всего 4. Каждый из них все свидетели могут выбрать единственным способом. Поэтому $m=1$.

Определим теперь число всех случаев n. Очевидно, что каждый свидетель может выбрать любой из четырех предметов, в частности все свидетели могут выбрать один предмет. Т.к. предметы разные, то имеем упорядоченную выборку с повторениями, т.е.

$$n=4^4=256.$$

Итак, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{256}=\frac{1}{64}=0{,}016$.

Задача 45. Электрическая цепь состоит из 3 последовательно включенных и независимо работающих приборов. Вероятности выхода из строя первого, второго и третьего прибора соответственно равны 0,25, 0,05 и 0,1. Вычислите вероятность того, что в цепи не будет тока.

Решение.

Т.к. все приборы включены в цепь последовательно, то отказ цепи произойдет, если хотя бы один прибор откажет. И, соответственно, в цепи будет ток, если все три прибора будут работать.

Обозначим:

A – рассматриваемое событие «в цепи не будет тока»;

A_i – отказ i-го прибора, $i=1,2,3$.

Выразим вероятность рассматриваемого события через вероятность противоположного события ($\overline{A}$ – в цепи будет ток):

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)=$$

$$=1-(1-0{,}25)(1-0{,}05)(1-0{,}1)=1-0{,}75\cdot0{,}95\cdot0{,}9=1-0{,}641=0{,}359.$$

Задача 46. На заводе 35% деталей выпускаются бракованными. Партия состоит из 8 деталей. Найдите наивероятнейшее число бракованных деталей в партии и вероятность того, что в партии будет такое количество бракованных деталей.

Решение.

В n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p наиболее вероятным числом успехов является

а) единственное число $k_0 = [np + p]$, если число $np + p$ не целое;

б) два числа $k_0 = np + p$ и $k_0 = np + p - 1$, если число $np + p$ целое.

В данном случае $p = 0{,}35$. Отсюда:

$$np + p = 8 \cdot 0{,}35 + 0{,}35 = 2{,}8 + 0{,}35 = 3{,}15.$$

Следовательно, $k_0 = [3{,}15] = 3$.

Вероятность того, что в партии будет ровно 3 бракованных детали, по формуле Бернулли равна:

$$P_8(k = 3) = C_8^3 p^3 (1 - p)^{8-3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot 0{,}35^3 \cdot 0{,}65^5 = 56 \cdot 0{,}004975 = 0{,}279.$$

Задача 47. Трое охотников одновременно выстрелили в медведя. Тот был убит, и в шкуре оказались две пули. Известно, что первый охотник попадает в цель с вероятностью 0,3, второй – 0,5, третий – 0,8. Определите вероятности следующих событий: в медведя попали первые два охотника.

Решение.

Обозначим: A – произошедшее событие «в медведя попали ровно две пули, или, что равносильно, ровно два стрелка»; A_i – в медведя попал i-й стрелок, $i = 1, 2, 3$.

Очевидно, что искомое событие имеет вид: $A_1 A_2 / A$. По формуле Байеса имеем:

$$P(A_1 A_2 / A) = \frac{P(A / A_1 A_2) P(A_1 A_2)}{P(A)}.$$

Определим данные вероятности.

Событие A наступит тогда и только тогда, когда в медведя попадут ровно два стрелка. Это возможно в трех случаях: в медведя попали 1-й и 2-й охотники, и не попал 3-й охотник; в медведя попали 1-й и 3-й охотники, и не попал 2-й охотник; в медведя попали 2-й и 3-й охотники, и не попал 1-й охотник. Поскольку стрелки стреляют независимо друг от друга, то события A_1, A_2, A_3 являются независимыми. Следовательно, по теореме сложения вероятностей имеем:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3) + P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) + P(\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}8) + 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}5) \cdot 0{,}8 + (1 - 0{,}3) \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}03 + 0{,}12 + 0{,}28 = 0{,}43.$$

Т.к. события A_1 и A_2 являются независимыми, то по теореме умножения вероятностей имеем:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15.$$

Событие $A / A_1 A_2$ означает, что в медведя попали ровно две пули при условии, что в него попали 1-й и 2-й стрелок. Это равносильно тому, что 3-й стрелок не попал, т.е.

$$P(A / A_1 A_2) = P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

В результате искомая вероятность равна:

$$P(A_1 A_2 / A) = \frac{P(A / A_1 A_2) P(A_1 A_2)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}15}{0{,}43} = 0{,}070.$$

Задача 48. Решить, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

Отдел технического контроля проверяет поступающие из двух цехов изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие цеха № 1 стандартно, равна 0,9, для изделия цеха № 2 эта вероятность равна 0,95. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий (по одному от каждого цеха) только одно стандартное.

Решение.

Вероятность искомого события A равна

$$P(A) = P(A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2),$$

где A_1 – событие «изделие цеха № 1 – стандартно», A_2 – событие «изделие цеха № 2 – стандартно».

Так как события A_1 и A_2 являются независимыми, а события $A_1 \overline{A_2}$ и $\overline{A_1} A_2$ являются несовместными, то

$$P(A) = P(A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2) = P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2) = P(A_1) P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) P(A_2) =$$

$$= 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}95) + (1 - 0{,}9) \cdot 0{,}95 = 0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}95 = 0{,}045 + 0{,}095 = 0{,}14.$$

Задача 49. Решить, используя формулу полной вероятности.

На склад поступило 1500 изделий с первой фабрики и 2000 изделий со второй. Известно, что средний процент нестандартных изделий среди продукции первой фабрики равен 3%, второй – равен 2%. Найти вероятность того, что наудачу взятое со склада изделие будет нестандартным.

Решение.

Имеем две гипотезы H_1 и H_2 – изделие поступило с первой или со второй фабрики, соответственно. Соответствующие вероятности равны

$$P(H_1) = \frac{1500}{1500 + 2000} = \frac{1500}{3500} = \frac{3}{7},$$

$$P(H_2) = \frac{2000}{1500 + 2000} = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}.$$

Тогда по формуле полной вероятности вероятность искомого события равна

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{3}{7} \cdot 0{,}03 + \frac{4}{7} \cdot 0{,}02 = \frac{0{,}09 + 0{,}08}{7} = \frac{0{,}17}{7} = 0{,}024.$$

Задача 50. Решить, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

Для каждого из трех производственных участков вероятности не выполнения плана соответственно равны: 0,02; 0,05 и 0,01. Найти вероятность того, что к моменту подведения итогов работы плановое задание будет выполнено двумя участками.

Решение.

Вероятность искомого события A равна

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3),$$

где A_1 – событие «1-й производственный участок выполнил план», A_2 – событие «2-й производственный участок выполнил план», A_3 – событие «3-й производственный участок выполнил план».

Так как события A_1, A_2 и A_3 являются независимыми, а события $A_1 A_2 \overline{A_3}$, $A_1 \overline{A_2} A_3$ и $\overline{A_1} A_2 A_3$ являются несовместными, то

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3) = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 0{,}98 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}01 + 0{,}98 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}99 + 0{,}02 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}99 = 0{,}00931 + 0{,}04851 + 0{,}01881 = 0{,}077.$$

Задача 51. Решить, используя формулу полной вероятности.

Трое рабочих изготовили за смену 60 деталей. Производительность рабочих относится как 1:2:3. Первый рабочий изготавливает в среднем 95% годных деталей, второй – 85%, третий – 90%. Найти вероятность того, что наудачу взятая из числа изготовленных за смену деталь низкого качества.

Решение.

Имеем две гипотезы H_1, H_2 и H_3 – изделие изготовлено 1-м, 2-м и 3-м рабочим, соответственно. Соответствующие вероятности равны

$$P(H_1) = \frac{1}{1+2+3} = \frac{1}{6},$$

$$P(H_2) = \frac{2}{1+2+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(H_3) = \frac{3}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Тогда по формуле полной вероятности вероятность искомого события равна

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 0{,}05 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}15 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}1 = \frac{0{,}05+0{,}3+0{,}3}{6} = \frac{0{,}65}{6} = 0{,}108.$$

Задача 52. На подносе 5 пирожков с картошкой и 4 с капустой. Наудачу взяли 3 пирожка. Какова вероятность того, что среди них хотя бы 2 с капустой?

Решение.

Обозначим искомое событие A – «среди трех взятых наудачу пирожков хотя бы два с капустой». Тогда противоположное событие $\overline{A}$ – «среди трех взятых наудачу пирожков менее двух с капустой». Имеем

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(A_0 + A_1) = 1 - P(A_0) - P(A_1),$$

где A_0 – «среди трех взятых наудачу пирожков ни одного с капустой», A_1 – «среди трех взятых наудачу пирожков ровно один с капустой».

По классической формуле имеем:

$$P(A_0) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5!\cdot 3!\cdot 6!}{3!\cdot 2!\cdot 9!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{9\cdot 8\cdot 7} = \frac{5}{3\cdot 2\cdot 7} = \frac{5}{42},$$

$$P(A_1) = \frac{C_5^2\cdot C_4^1}{C_9^3} = \frac{5!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 6!}{2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 3!\cdot 9!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 4}{9\cdot 8\cdot 7} = \frac{5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 7} = \frac{20}{42}.$$

Отсюда вероятность того, что среди трех взятых наудачу пирожков хотя бы два с капустой, равна

$$P(A) = 1 - P(A_0) - P(A_1) = 1 - \frac{5}{42} - \frac{20}{42} = \frac{42-25}{42} = \frac{17}{42} \approx 0{,}405.$$

Задача 53. Два лица *X* и *Y* условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа независимо от другого?

Решение.

Будем считать интервал с 14 до 15 часов дня отрезком [0,1] длиной 1 час. Пусть ξ и η – моменты прихода *X* и *Y* (точки отрезка [0,1]). Все возможные результаты эксперимента – множество точек квадрата со стороной 1: $\Omega = \{(\xi, \eta): 0 \le \xi \le 1,\ \ 0 \le \eta \le 1\} = [0, 1] \times [0, 1]$, т.е. $\mathrm{mes}(\Omega) = 1$ (см. рис. 1).

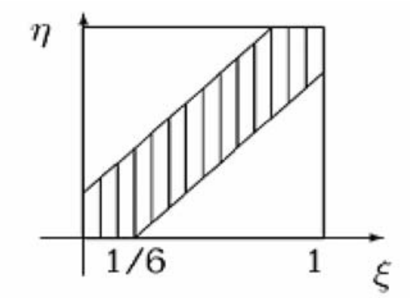

Рис. 1.

Можно считать, что эксперимент сводится к бросанию точки наудачу в квадрат. При этом благоприятными исходами (рис. 1.3) являются точки множества $A = \{(\xi, \eta): |\xi - \eta| \le 1/6\}$ (10 минут = 1/6 часа). Т.е. попадание во множество *A* наудачу брошенной в квадрат точки означает, что *X* и *Y* встретятся. Тогда вероятность встречи равна

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)} = \frac{1-(5/6)^2}{1} = \frac{11}{36}.$$

Задача 54. Есть три завода, производящих одну и ту же продукцию. При этом 1-й завод производит 25%, 2-й завод – 35% и 3-й завод – 40% всей производимой продукции. Брак составляет 5% от продукции 1-го завода, 3% от продукции 2-го и 4% от продукции 3-го завода.

Вся продукция смешивается и поступает в продажу. Найти: а) вероятность купить бракованное изделие; б) условную вероятность того, что купленное изделие изготовлено 1-м заводом, если это изделие бракованное.

Решение.

Обозначим событие A – «куплено бракованное изделие». Так как производят продукцию три завода, то выдвинем три гипотезы:

H_1 – изделие изготовлено первым заводом;

H_2 – изделие изготовлено вторым заводом;

H_3 – изделие изготовлено третьим заводом.

Найдем вероятности гипотез: $P(H_1) = 0,25$; $P(H_2) = 0,35$; $P(H_3) = 0,4$. Проверим:

$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0,25 + 0,35 + 0,4 = 1$.

Найдем условные вероятности события A относительно выдвинутых гипотез:

$P(A/H_1) = 0,05$; $P(A/H_1) = 0,03$; $P(A/H_1) = 0,04$.

Определим вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i) = 0,05 \cdot 0,25 + 0,03 \cdot 0,35 + 0,04 \cdot 0,4 = 0,039\,.$$

Вычислим долю первого завода в общем количестве бракованных изделий, т.е. переоценим гипотезу H_1 по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A/H_i)P(H_i)} = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,039} = 0,321\,.$$

Задача 55. Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если он пойдет по первой дороге, то вероятность выхода из леса в течение часа равна 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвертой – 0,1; если по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?

Решение.

В данном случае событие A – «турист через час он вышел из леса» произошло. Поэтому используем формулу Байеса. Искомая вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса, равна

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{5} P(H_i)P(A/H_i)}\,,$$

где H_i – гипотеза «турист пойдет по i-й дороге, i = 1, 2, 3, 4, 5. Очевидно, что все пять гипотез равновероятны, т.е.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = P(H_5) = 0{,}2 .$$

Значения условных вероятностей даны в условии задачи:

$$P(A/H_1) = 0{,}6;\ P(A/H_2) = 0{,}3;\ P(A/H_3) = 0{,}2;\ P(A/H_4) = P(A/H_5) = 0{,}1 .$$

Отсюда имеем:

$$P(H_1/A) = \frac{0{,}2\cdot 0{,}6}{0{,}2\cdot 0{,}6 + 0{,}2\cdot 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0{,}2\cdot 0{,}1} =$$

$$= \frac{0{,}6}{0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1} = \frac{0{,}6}{1{,}3} = 0{,}462$$

Задача 56. Производится бросание двух костей. Рассмотрим события:

A = {на первой кости выпало нечетное число очков},

B = {на второй кости выпало нечетное число очков},

C = {сумма очков – нечетна}.

Показать, что эти события: а) попарно независимые; б) зависимые в совокупности.

Решение.

События A, B, C – попарно независимые. Действительно,

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2,\ P(AB) = P(AC) = P(BC) = 1/4 .$$

Но независимости в совокупности нет, т.к.

$$ABC = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(ABC) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C) .$$

Задача 57. В магазине 5 холодильников. Вероятность выхода из строя каждого холодильника в течение года равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение года ремонта потребует: 1) 4 холодильника; 2) не менее 2 холодильников; 3) не более 1 холодильника; 4) не менее 1 холодильника.

Решение.

Поскольку все холодильники имеют одинаковую вероятность выхода из строя в течение года p = 0,2, то используем формулу Бернулли.

1) Вероятность того, что в течение года ремонта потребуют 4 холодильника, равна

$$P_5(k = 4) = C_5^4 p^4 (1 - p) = 5\cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064 .$$

2) Вероятность того, что в течение года ремонта потребуют не менее 2 холодильников, равна

$$P_5(k \ge 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - P_5(k = 0) - P_5(k = 1) =$$

$$= 1 - C_5^0 p^0 (1-p)^5 - C_5^1 p^1 (1-p)^4 = 1 - 1 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 - 5 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}2627.$$

3) Вероятность того, что в течение года ремонта потребует не более 1 холодильника, равна

$$P_5(k \le 1) = 1 - P_5(k \ge 2) = 1 - 0{,}2627 = 0{,}7373.$$

4) Вероятность того, что в течение года ремонта потребует не менее 1 холодильника, равна

$$P_5(k \ge 1) = 1 - P_5(k < 1) = 1 - P_5(k = 0) =$$

$$= 1 - C_5^0 p^0 (1-p)^5 = 1 - 1 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = \frac{67232}{100000} = 0{,}6723.$$

Задача 58. Вероятность того, что изделие является дефектным, равна 0,1. Сколько надо выбрать изделий, чтобы среди них с вероятностью более 0,96 оказалось хотя бы одно бездефектное?

Решение.

По условию задачи требуется найти минимальное число *n*, для которого выполнялось бы неравенство $P_n(k \ge 1) > 0{,}96$. Данное неравенство равносильно тому, что $P_n(k = 0) = C_n^0 p^n q^0 < 1 - 0{,}96 = 0{,}04$.

Подставив $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$ в последнее неравенство, и, учтя, что $C_n^0 = 1$, имеем: $P_n(k = 0) = C_n^0 p^n q^0 = 1 \cdot 0{,}9^n \cdot 0{,}1^0 = 0{,}9^n < 0{,}04$.

Прологарифмируем обе части полученного неравенства:

$$n \ln 0{,}9 > \ln 0{,}04 \Rightarrow n > \frac{\ln 0{,}04}{\ln 0{,}9} = \frac{-3{,}2189}{-0{,}1054} = 30{,}551 \Rightarrow n_{\min} = 31.$$

Таким образом, надо выбрать не менее чем 31 изделие, чтобы среди них с вероятностью более 0,96 оказалось хотя бы одно бездефектное

Задача 59. Адвокат выигрывает в суде в среднем 70% дел. Найдите вероятность того, что он из 8 дел выиграет больше половины.

Решение.

По условию задач требуется определить вероятность $P_8(k>4)$, где k – количество выигранных дел.

Поскольку вероятность выигрыша дела известна ($p=0{,}7$), то $q=1-p=0{,}3$. Отсюда по формуле Бернулли имеем:

$$P_8(k>4)=P_8(k=5)+P_8(k=6)+P_8(k=7)+P_8(k=8)=$$

$$=C_8^5\cdot 0{,}7^5\cdot 0{,}3^3+C_8^6\cdot 0{,}7^6\cdot 0{,}3^2+C_8^7\cdot 0{,}7^7\cdot 0{,}3^1+C_8^8\cdot 0{,}7^8\cdot 0{,}3^0=$$

$$=0{,}2450+0{,}2965+0{,}1776+0{,}0576=0{,}797.$$

Таким образом, вероятность того, что адвокат из 8 дел выиграет больше половины, равна 0,797.

Задача 60. Вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна 0,7. Сколько испытаний нужно произвести, чтобы наиболее вероятное число появлений события A в производимых испытаниях $k_0=20$?

Решение.

По условию $p=0{,}7$ и $\sum_{i=1}^{l}p_i\le 0{,}5,\ \sum_{i=1}^{l+1}p_i>0{,}5$. Тогда имеем

$$0{,}7n-0{,}3\le 20\le 0{,}7n+0{,}7.$$

Это двойное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}0{,}7n-0{,}3\le 20,\\ 0{,}7n+0{,}7\ge 20.\end{cases}$$

Из первого неравенства системы имеем $n\le 20{,}3/0{,}7=29$. Из первого неравенства системы найдем $n\ge 19{,}3/0{,}7\approx 27{,}57$. Отсюда следует, что необходимо произвести 28 или 29 испытаний.